

# INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.

## Ejercicio 19

a)  $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$  No hay que hacer división

1) Hallamos las raíces del denominador.

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} G_1 = 3 \\ G_2 = 1 \end{cases}$$

Raíces Reales simples **CASO 1**

2) Descomposición  $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)}$

$$\frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{Ax+Bx-A-3B}{(x-1)(x-3)}$$

Iguamos numeradores  $1 = (A+B)x - (A+3B)$

$$\begin{cases} 0 = A+B \Rightarrow A = -B \\ 1 = -(A+3B) \Rightarrow 1 = -A+3A = 2A \end{cases}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x-3| - \frac{1}{2} \ln |x-1| + C = \text{propiedades de logaritmos.}$$

$$= \ln \sqrt{\frac{|x-3|}{|x-1|}} + C$$



b)  $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4} dx$  No hay que dividir

1) Raíces del denominador.  $\frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$  doble

(CASO 2) Raíces reales múltiples.  $(x+2)^2$

2) Descomposición  $\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$

Igualemos numeradores

$$x+1 = Ax + 2A + B$$

x)  $\boxed{1=A}$

indep.)  $1 = 2A + B \Rightarrow 1 = 2 + B \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{(x+2)} - \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln(x+2) - \frac{(x+2)^{-1}}{-1}$$

$$= \boxed{\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C}$$



$$c) I = \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x + 13} dx$$

SIN RAICES REALES

CASO 3

1º) Si que hay que dividir

$$\begin{array}{r} x^3 - x \quad | \quad x^2 + 4x + 13 \\ -x^3 - 4x^2 - 13x \\ \hline -4x^2 - 14x \\ +4x^2 + 16x + 52 \\ \hline 2x + 52 \end{array}$$

Resido

$$I = \int (x-4) dx + \int \frac{2x+52}{x^2+4x+13} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + I_1$$

$I_1$  función Racional:  $x^2+4x+13$  No tiene raíces Reales  
 $\therefore$  CASO 3

$$I_1 = \int \frac{2x+52}{x^2+4x+13} = \int \frac{2x+4-4+52}{x^2+4x+13} =$$

$$(g(x) = x^2 + 4x + 13 \quad g'(x) = 2x + 4)$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} + \int \frac{48}{x^2+4x+13} = \ln|x^2+4x+13| + I_2$$

logaritmo                      arco tangente

$$I_2 = \int \frac{48}{x^2+4x+13} = \int \frac{K f'(x)}{1+(f(x))^2} = K \arctan(f(x))$$

COMPLETAR CUADRADOS

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

$$x^2 + 4x + 13 = 9 + (x+2)^2$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 48 \int \frac{1/4}{9 + \frac{(x+2)^2}{9}} dx = \frac{48}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2} \left[ f(x) = \frac{x+2}{3} \right] f'(x) = \frac{1}{3} \\ &= \frac{48}{9} \cdot 3 \int \frac{1/3 dx}{1 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2} = \frac{48}{3} \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) \end{aligned}$$



$$d) \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2} dx$$

1) Raíces denominador  $x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$    
 $\nearrow$  simple  $\nearrow$  simple.

CASO 2 Raíces dobles y simples Reales

2) Descomposición  $\frac{x^2+1}{x^4-x^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$

$$x^2+1 = Ax^2(x+1) + Bx^2(x-1) + Cx(x^2-1) + D(x^2-1)$$

$$x^2+1 = \underline{Ax^3} + \underline{Ax^2} + \underline{Bx^3} - \underline{Bx^2} + \underline{Cx^3} - \underline{Cx} + \underline{Dx^2} - \underline{D}$$

$$\boxed{B=-1}$$

$$x^3) \quad 0 = A+B+C \Rightarrow A=-B$$

$$x^2) \quad 1 = A-B+D \Rightarrow 1 = A+A-1 \Rightarrow 2=2A$$

$$\boxed{A=1}$$

$$x) \quad 0 = -C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$(ind) \quad 1 = -D \Rightarrow \boxed{D=-1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx - \int \frac{1}{(x+1)} dx - \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{x} = \boxed{\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{x} + C}$$



$$e) I = \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

CASO 3 RAÍCES COMPLEJAS.

El denominador No tiene Raíces Reales.

Descomposición:

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)}$$

→ polinomio de 1 grado menos que el denominador.

$$x+1 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$x+1 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{término } x^3) \\ \text{término } x^2) \\ \text{término } x) \\ \text{término ind)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 = A+C \Rightarrow C = -A \\ 0 = B+D \Rightarrow D = -B \\ 1 = 4A+C \Rightarrow 1 = 4A-A \quad 1=3A \quad \boxed{A=1/3} \\ 1 = 4B+D \Rightarrow \boxed{B=1/3} \end{array}$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \underbrace{\frac{1}{3} \int \frac{x+1}{(x^2+1)} dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{3} \int \frac{x+1}{(x^2+4)} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} dx}_{\text{logaritmo}} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1} dx}_{\text{arctangente}} = \ln|x^2+1| + \text{arctg } x$$

$$I_2 = \underbrace{\int \frac{x}{x^2+4} dx}_{\text{logaritmo}} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+4} dx}_{\text{arctangente } I_3} = \ln|x^2+4| + I_3$$

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{k f'(x)}{1+(f(x))^2} = \int \frac{1/4}{1+(\frac{x}{2})^2} = \left(\frac{1}{2}\right) \int \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \text{arctg } \frac{x}{2}$$

$$+ \frac{1}{3} (\ln|x^2+1| + \text{arctg } x) - \frac{1}{3} (\ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \text{arctg } \frac{x}{2}) + C$$