

VECTORES EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

① Ejercicio 1

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mchí formada por dichos vectores

entonces $|A| = 3 + 8 - 2 - 6 = 3 \neq 0$

luego $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son l.i. ya que son 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ por lo tanto un sub. generador $\Rightarrow$ base.

b) $(2, -1, 3) = \lambda_1 (1, 3, 4) + \lambda_2 (1, 0, 1) + \lambda_3 (1, 2, 2)$

coordenadas

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

en la base canónica

$$3\lambda_1 + 2\lambda_3 = -1$$

$$4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 3$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

3ª) $\boxed{\lambda_3 = -2}$

2ª) $-3\lambda_2 - \lambda_3 = -7 \Rightarrow -3\lambda_2 + 2 = -7 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-9}{-3} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 3}$

1ª) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \Rightarrow \lambda_1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$

entonces $\boxed{\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}}$

- Ejercicio 2 - Consideramos A con 3 vectores y A^* con 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c & d \end{matrix}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Rango $A = 3 = \text{Rango } A^*$

$\therefore$ Vectores l.d.

Como Resolvemos

para la parte (b) de prede por el sistema y CONDAIBLE determinado.

$$3z = 3$$

$$\boxed{z = 1}$$

$$3y + 3z = 0$$

$$3y + 3 = 0$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - 1 + 1 = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

Entonces $\vec{d} = -\vec{b} + \vec{c} = \vec{c} - \vec{b}$ efectivamente

- Ejercicio 3 - Consideramos A con 3 vectores y A^* con 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{matrix}$

Rango $A = 2$

Rango $A^* = 3$

(No) es un sistema generador
 $|A| = 0$ y son 3 vectores l.d } No BASE

No prede poner $\vec{d}$ como c.l de $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Ejercicio 4

4) Si $\vec{a} = k\vec{b}$ paralelos serán l.d.

$$(1, 0, -2) = k(-1, 1, -1) \text{ igualando término a término}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = -k \\ 0 = k \\ -2 = -k \end{array} \right\} \text{contradicción}$$

a) Por lo tanto $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son l.i. No son paralelos

b) No forman una base de $\mathbb{R}^3$ porque No son un sistema generador.

Las bases de $\mathbb{R}^3$ tienen forzosamente dimensión 3 y el sistema sólo tiene 2 vectores, no 3.

Comprobar que No es sist generador (No haría falta)

¿un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lo puedo poner como c.l. de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, -2) + \lambda_2(-1, 1, -1)$$

$$x = \lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = x + \lambda_2 = x + y$$

$$y = \lambda_2$$

$$z = -2\lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow$$

$$z = -2(x+y) - y = -2x - 3y$$

Por lo tanto los puntos del espacio que NO cumplen que $z = -2x - 3y$ No podrían ponerse como c.l. de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Ejemplo $(1, 1, 5)$, hay infinitos....

$$c) 3a + 2c = 5b \Rightarrow c = \frac{1}{2}(5b - 3a) = \frac{1}{2}[(1, 5, 5) - (3, 0, 6)] = \frac{1}{2}(-2, 5, -1) = (-1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$$

efectivamente c cumple $z = -2x - 3y$

Ejercicio 5 (Hay 1 fallo por ejemplo $\vec{c} = (1, 0, \frac{1}{2})$)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1/2 \end{vmatrix} = +1 + 1 - 2 = 0$
luego l. dependientes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{aligned} z &= 1 \\ 2y + z &= 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -1/2 \\ -x + y &= 0 \Rightarrow x = y = -1/2 \end{aligned}$$

$$\therefore \forall \lambda \neq 0 \quad -\frac{1}{2}a^D - \frac{1}{2}b^D + 1c^D = 0$$

$$\begin{aligned} -1a^D - 1b^D + 2c^D &= 0 \\ \boxed{-1a^D - 1b^D + 2c^D = 0} \end{aligned}$$

Ejemplo $\lambda = 1$ $-a^D - b^D + 2c^D = 0$ *Combinación de dependencia.*

$$(2, -1, 2) + (0, 1, -1) - 2(1, 0, \frac{1}{2}) =$$

$$(2-2, -1+1, 2-1-1) = (0, 0, 0) \text{ efectivamente.}$$

NOTA: los vectores $(2, -1, 2)$, $(0, 1, -1)$ y $(1, 0, \frac{1}{2})$

serían linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

entonces $2z = 0 \Rightarrow z = 0$

$$2y + z = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$-x + y = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

solo existe solución trivial

Son l.i. y $|A| \neq 0$

Ejercicio 6

$$\vec{a} = (0, 1, 2) \quad \vec{b} = (2, 0, 1) \quad \vec{c} = (1, 2, 0)$$

a) forman base de $\mathbb{R}^3$. $\Leftrightarrow$ son linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 8 - 0 = 9 \neq 0$$

Si que son l.i. $|A| \neq 0$

b) Averiguar las componentes (coordenadas) en dicha base del vector $\vec{d} = (-1, 2, -1)$

$$(-1, 2, -1) = x(0, 1, 2) + y(2, 0, 1) + z(1, 2, 0)$$

o lo que es lo mismo $\boxed{Ax=B}$ matricialmente

Resolvemos por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\xrightarrow{F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array} \right) \text{ entonces } 9z = 9 \quad \boxed{z=1}$$

$$2y + z = -1 \quad 2y = -2 \quad \boxed{y=-1}$$

$$1^a) \quad x + 2z = 2 \quad x + 2 = 2 \quad \boxed{x=0}$$

$\therefore$ coordenadas de $\vec{d}$ en dicha base $(0, -1, 1)$

c) Si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ son base son l.i.

no es posible poner $\vec{c}$ como c.l. de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pero

si de sí mismo

$$\boxed{\vec{c} = 1 \cdot \vec{c}}$$

POEDE QUE
HAYA UN ERROR
EN LA PREGUNTA

Ejercicio 7

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \quad \vec{b} = (2, 1, -1) \quad \vec{c} = (1, 2, k)$$

a) Hallar $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y el ángulo que forman.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 4 - 1 - 3 = 0$$

Luego $\vec{a}$ y $\vec{b}$ perpendiculares y el ángulo es 90°

b) Encontrar k para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ formen 60°

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3k = 3k$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + k^2} = \sqrt{5+k^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{c}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6k}{\sqrt{14}} = \sqrt{5+k^2} \\ \text{ecuación radical} \end{array} \right.$$

$$3k = \sqrt{14} \cdot \sqrt{5+k^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$3k = \sqrt{14} \cdot \sqrt{5+k^2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{36k^2}{14} = 5+k^2 \Rightarrow \frac{36k^2}{14} - k^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{6k}{\sqrt{14}} \right)^2 = (\sqrt{5+k^2})^2 \Rightarrow \frac{36k^2}{14} = 5+k^2 \Rightarrow \frac{36k^2}{14} - k^2 = 5 \Rightarrow \frac{11k^2}{7} = 5 \Rightarrow k^2 = \frac{35}{11} \Rightarrow k = \begin{cases} +\sqrt{\frac{35}{11}} \\ -\sqrt{\frac{35}{11}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{18k^2 - 7k^2}{7} = 5 \Rightarrow \frac{11k^2}{7} = 5 \Rightarrow k^2 = \frac{35}{11} \Rightarrow k = \begin{cases} +\sqrt{\frac{35}{11}} \\ -\sqrt{\frac{35}{11}} \end{cases}$$

son las posibles soluciones hay que comprobar.

Si $k = \sqrt{\frac{35}{11}}$ sustituimos ec. Radical $\frac{6}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{35}{11}} \stackrel{?}{=} \sqrt{5 + \frac{35}{11}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{36 \cdot 35}{11 \cdot 14}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{55+35}{11}} \Rightarrow \sqrt{\frac{90}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} \quad \text{Si es buena.}$$

Si $k = -\sqrt{\frac{35}{11}}$ sustituimos $-\frac{6}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{35}{11}} = \sqrt{5 + \frac{35}{11}}$

$$-\sqrt{\frac{90}{11}} = \sqrt{\frac{90}{11}} \quad \text{No es válida}$$

Solución $k = \sqrt{\frac{35}{11}}$

Ejercicio 9

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo de 30° y su módulo es 3

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ = 9 \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0 = 9 \\ \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 \cos 0 = 9 \end{cases}$$

Entonces $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 9 + 9\sqrt{3} + 9$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 9(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9(2 + \sqrt{3})} = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

igualmete $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 18 - 9\sqrt{3} = 9(2 - \sqrt{3})$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{9(2 - \sqrt{3})} = 3\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ángulo que forman $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 9 - 9 = 0$$

Logo forman un ángulo de 90°

Ejercicio 10

$\vec{a}(-1, 1, 0)$ $\vec{b}(1, -1, -1)$ $\vec{c} = k\vec{a} - \vec{b}$

a) Hallar k para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ ortogonales $\rightarrow$ formen un ángulo de 90° $\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{c}) = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$k|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \begin{cases} |\vec{a}|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2k + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cuando $k=2$
 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} =$

$$\cos \theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}} \Rightarrow = (-3, 3, 1)$$

$\theta = 157.99^\circ$ ángulo que forman.

Ejercicio 11

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = 3(1,0,0) + (0,1,0) = (3,1,0)$$

$$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (1,0,0) - 2(0,1,0) + (0,0,1) = (1,-2,1)$$

Hallar x y y tales que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea ortogonal a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$

$$\vec{c} = x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$$

$$\text{ortogonal a } \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{b} = 1 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \cdot 0 = \boxed{x - 2y = 0}$$

$$\text{por otro lado mismo módulo que } \vec{a} \Rightarrow |\vec{a}|^2 = (\sqrt{3^2 + 1^2})^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$
$$|\vec{c}|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{Sistema } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ (2y)^2 + y^2 = 10 \Rightarrow 4y^2 + y^2 = 10 \\ 5y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Cuando } y = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Cuando } y = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{c} = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \text{ o } (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \text{ su opuesto.}$$

Ejercicio 12 | FALLO EN EL ENUNCIADO

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} (0, x, y) \\ \vec{b} (-1, -2, 1) \\ \vec{c} (0, -1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 0 - x + y = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 0 + 2 + 1 = 3 \text{ No} \\ \text{ortogonal} \end{array}$$

ENUNCIADO alternativo $\rightarrow$ Hallar x e y para que $\vec{a}$ ortogonal a $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow -2x + y = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = y \\ -2y + y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

sol puede ser $(0, 0, 0)$ Vector nulo

Ejercicio 13 $\vec{a} (1, 0, 3)$ $\vec{b} (-2, 1, 4)$

i) $\vec{c} = \lambda \vec{a} + t \vec{b} = (1 - 2t, t, 3\lambda + 4t)$

ii) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 1 - 2t + 3(3\lambda + 4t) = 0$
 $1 - 2t + 9\lambda + 12t = 0$
 $8t + 9\lambda = -1 \Rightarrow 4\lambda + 5t = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{4}t$

$$\boxed{\lambda = -\frac{5}{4}t}$$

iii) $|\vec{c}| = 44$

$$\vec{c} = \left(-\frac{5}{4}t - 2t, t, -\frac{15}{4}t + 4t \right) = \left(-\frac{13}{4}t, t, \frac{1}{4}t \right) \quad \forall t \neq 0$$

$$|\vec{c}|^2 = 1936 = \left(-\frac{13}{4}t \right)^2 + t^2 + \left(\frac{1}{4}t \right)^2 = t^2 \frac{169 + 16 + 1}{16} \Rightarrow$$

$$t^2 = \frac{1936}{16} \cdot 16 = 1936 \Rightarrow t = \pm \frac{44}{4} \sqrt{16} = \pm 11 \sqrt{16}$$